თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი
მათემატიკის ინსტიტუტი

TBILISI STATE UNIVERSITY
I. VEKUA INSTITUTE OF APLLIED MATHEMATICS

შალვა ფხაკაძე

Shalva Pkhakadze

თბილისი - Tbilisi

1999

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

TBILISI STATE UNIVERSITY

მეცნიერებათა დამსახურებული მოღვაწის
პროფესორ შალვა ფხაკაძის დაბადებიდან 80
წლისთავის საიუბილეოდ მიძღვნილი
გამოცემა

This publication is dedicated to the memory
of honoured scientist Prof. Sh. Pkhakadze

თბილისი - Tbilisi

1999

იბეჭდება თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის აკად. ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო საბჭოს დადგენილების თანახმად.

1999 წლის 7 აპრილს, ხარება დღით, ცნობილ ქართველ მეცნიერს - შალვა ფხაკაძეს შეუსრულდებოდა დაბადებიდან 80 წელი.

ამ თარიღს ეძღვნება თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტთან არსებული ენის, ლოგიკის და მეტყველების ცენტრის მიერ ორგანიზებული თბილისის მესამე საერთაშორისო სიმპოზიუმი „ენა, ლოგიკა, გამოთვლები". ამავე თარიღს უძღვნიან ავტორები ამ მცირე მოცულობის ნაშრომს, სადაც მოკლედაა მოთხრობილი შ. ფხაკაძის ოჯახის, ცხოვრებისა და მეცნიერული მოღვაწეობის შესახებ.

On april 7, 1999 was an 80-th anniversary of famous Georgian scientist Prof. Sh. Pkhakadze.

The third international Tbilisi symposium on language, logic and computation will be devoted to this date, which is organized by the Tbilisi State University centre "language, logic and speech".

These papers are also devoted to this date, where very briefly is related about Sh. Pkhakadze's family, life and scientific activities.

წინათქმის მაგიერ

ეს მცირე მოცულობის ნაშრომი კიდევ ერთი ანალიზია მეცნიერებათა დამსახურებული მოღვაწის პროფ. შ. ფხაკაძის მეცნიერული მოღვაწეობისა და უანგარო პატივისცემით გამსჭვალული ერთგვარი გახსენებაა მისი ამქვეყნიური ცხოვრებისა.

იგი დაიბადა ზესტაფონის რაიონის სოფელ ზედა საქარაში სამსონ ფხაკაძისა და ნინო ფუტკარაძის ოჯახში, ოჯახში, სადაც ბატონი შალვას გარდა კიდევ ოთხი შვილი იზრდებოდა - თამარი, მიხეილი, ვასილი და პეტრე ფხაკაძეები, - ოჯახში, სადაც მიუხედავად ყველაფრისა, შრომის, ერთგულების, სიკეთის და სიყვარულის რწმენა სუფევდა.

ქალბატონი თამარ ფხაკაძე რესპუბლიკის დამსახურებული გეოლოგი ბრძანდებოდა და სწორედ მის სახელთანაა დაკავშირებული თერჯოლის რაიონში დღეს თამარის წყაროდ ცნობილი სამკურნალო წყლის აღმოჩენა, რომელსაც მან მიაკვლია და რომლის სამკურნალო თვისებებიც შეამჩნია მანვე.

ბატონი მიხეილი, რესპუბლიკის დამსახურებული ექიმი, თადარიგის პოლკოვნიკი, მეორე მსოფლიო ომის მონაწილე, რიგი ორდენების კავალერი და სამხედრო ექიმი, თავისი დარგის დაფასებული და აღიარებული სპეციალისტი, დღესაც თავდაუზოგავად ემსახურება ადამიანთა ჯანმრთელობის დაცვის საქმეს.

ბატონი ვასილი, ასევე რესპუბლიკის დამსახურებული ექიმი, რიგი პუბლიკაციების და სამეცნიერო ხასიათის ნაშრომთა ავტორი, წლების განმავლობაში მსახურობდა აფხაზეთში, სადაც მან მისი გამორჩეული გულისხმიერი ბუნებისა და მაღალი პროფესიონალიზმის წყალობით ბევრი მეგობარი შეიძინა, რომლებიც დღესაც პატივს სცემენ მის

სახელსა და ხსოვნას. მის პუბლიკაციათა შორის აღსანიშნავია ჰიპერტონიის პრობლემებისადმი მიძღვნილი სქელტანიანი ნაშრომი, სადაც იგი სიღრმისეულად განიხილავს აღნიშნული პრობლემატიკისათვის დამახასიათებელ საკითხებს.

ბატონი პეტრე, რესპუბლიკის დამსახურებული მელიორატორი, იმავდროულად მელიორაციის ინსტიტუტის და საქართველოს სასოფლო-სამეურნეო აკადემიის სწავლული მდივანი, მთელი რიგი მნიშვნელოვანი მეცნიერული შრომების ავტორი გახლდათ. მისი სადოქტორო დისერტაცია ეძღვნებოდა ისეთ სერიოზულ პრობლემას, როგორიც იყო კოლხეთის დაბლობი ჭაობების ამოშრობა—ათვისების საქმე. იქნებ არც არის საჭირო, მაგრამ, თუ ბატონ პეტრეზეა საუბარი, ისიც უნდა ითქვას, რომ იგი ბრწყინვალე თამადა ბრძანდებოდა- ქართული ადათითა და წესებით აღზრდილი, და მათივე მატარებელი, ასეთივე კვალს ტოვებდა ყველგან.

... თითოეულ მათთაგანზე შეიძლებოდა საუბარი დიდხანს, შეიძლებოდა საუბარი გატაცებით. მათი ღვაწლი არ შემოიფარგლება იმ მშრალი მონაცემებით, რომლებიც ზევით აღვნიშნეთ. მაგრამ ძირი მათი ღვაწლმოსილებისა, და ამ წინათქმის მაგიერის მიზანი, გახლავთ გახსენება და პატივის მიგება იმისა, რასაც ბატონი სამსონ ფხაკაძისა და ქალბატონი ნინო ფუტკარაძის ოჯახი ჰქვია, ოჯახი, სადაც ოჯახიშვილები, მიუხედავად ყველაფრისა შრომის, ერთგულების, სიკეთის და სიყვარულის რწმენით იზრდებოდნენ.

პროფ. შ. ფხაკაძის ცხოვრების მოკლე ბიოგრაფიული მიმოხილვა

შალვა სამსონის ძე ფხაკაძე დაიბადა 1919 წლის 7 აპრილს ზესტაფონის რაიონის სოფელ ზედა საქარაში. იგი წარჩინებით ამთავრებს სოფ. ზედა საქარის დაწყებით სკოლას (1930), ზესტაფონის I საშ. სკოლას (1933), ზესტაფონის

პედაგოგიურ სასწავლებელს (1936), თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტს(1941), ამასთან, სადიპლომო ნაშრომი "დიფერენციალური განტოლებების გეომეტრიული თეორიის შესახებ" მან დაიცვა აკადემიკოს გიორგი ჭოღოშვილის ხელმძღვანელობით.

1942-1952 წლებში მუშაობდა ზესტაფონის რაიონის სხვადასხვა სკოლებში მასწავლებლად. ამასთან, 1944-1949 წლებში შეთავსებით მუშაობდა ზესტაფონის რაიონის განათლების განყოფილებაში მეთოდისტად და ხელმძღვანელობდა აღნიშნული განყოფილების მათემატიკურ სექციას.

1949 წელს პროფესორ ვლადიმერ ჭელიძის ხელმძღვანელობით შალვა ფხაკაძე იწყებს ინტეგრალთა თეორიისა და სიმრავლეთა თეორიის ინტენსიურ შესწავლას, ხოლო ერთი წლის შემდეგ იწყებს ინტენსიურ მუშაობას ზომის თეორიაში.

1952 წლის იანვარში იგი გამოდის მოხსენებით ა. მ. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის ფუნქციათა თეორიის განყოფილების სემინარზე, სადაც მის მიერ მოხსენებულ იქნა მისი კვლევების ძირითადი შედეგები და მიმართულებანი. მასთან, დასმულ იქნა რიგი სერიოზული ამოცანები ლებეგის ტიპის ზომათა თეორიებისათვის. აქვე, პროფესორ ვლადიმერ ჭელიძის რჩევით, შალვა ფხაკაძე იღებს გადაწყვეტილებას, რომ ნაწილი მისი შრომებისა, და კერძოდ, ის ნაწილი, რომელიც ეხებოდა ფუბინის თეორემის სამართლიანობას ორჯერად ინტეგრალებში ინტეგრების რიგის შეცვლასთან დაკავშირებით, გაფორმდეს ცალკე დასრულებული ნაშრომის სახით საკანდიდატო დისერტაციად.

ხსენებული მოხსენების საფუძველზე მას იმავე წელს იწვევენ ა. მ. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში უმცროს მეცნიერ თანამშრომლად (1952 წლის 29 თებერვალი), სადაც იგი უკვე ასრულებს საკანდიდატო

დისერტაციის გაფორმებას, რომელსაც წარმატებით იცავს 1953 წლის 30 ივნისს.

1953 წელს მან გააკეთა რამდენიმე მოხსენება ვ. მ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში პ. ს. ნოვიკოვის სემინარზე, რომლებზეც მან დეტალურად დაახასიათა თავისი სამეცნიერო კვლევათა ძირითადი მიმართულებანი, ჩამოაყალიბა ამ მიმართულებისთვის დამახასიათებელი ძირითადი ამოცანები, და გააშუქა მიღებული შედეგები.

სემინარისა და პ. ს. ნოვიკოვის დადებითმა რეაქციამ გააძლიერა მომხსენებლის რწმენა და ძალები და იგი მიზანმიმართულად აგრძელებს ნაყოფიერ კვლევით საქმიანობას არჩეული მიმართულებით.

1953 წელს იგი გადაყვანილ იქნა უფროს მეცნიერ თანამშრომლის თანამდებობაზე, ხოლო 1957 წელს დაამტკიცეს უფროს მეცნიერ თანამშრომლად "ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის" სპეციალობით.

1956 წელს შალვა ფხაკაძემ დასაბეჭდად წარადგინა სადოქტორო დისერტაცია "ლებეგის ტიპის ზომათა თეორიისათვის", რომელიც მან წარმატებით დაიცვა 1959 წელს.

1965 წლის იანვარში ბატონ შალვას მიენიჭა უმაღლესი მათემატიკის კათედრის პროფესორის წოდება.

შემდგომში, 1967 წლამდე, პროფესორი შ. ფხაკაძე აგრძელებს მუშაობას აღნიშნული მიმართულებით და ღებულობს რიგ სიღრმისეულ შედეგებს ზომისა და სიმრავლეთა ზოგად თეორიაში. ამ შრომებში, კერძოდ, შესწავლილია ზომათა კანონიკური გაშლები, ზომათა უწყვეტობისა, გახლეჩადობის და განზოგადების საკითხები. დიდ ინტერესს იწვევს მის მიერ აგებული, პარადოქსული თვისებების მქონე, ნამდვილ რიცხვთა აბელის ჯგუფის ეფექტურად

განსაზღვრული ქვეჯგუფი, რომლის ორჯერ შევიწროებით მიიღება სიმრავლე, რომელიც იხლიჩება კონტინუალურ რიცხვ სიმრავლეებად, რომელთაგან თითოეული კონგრუენტულია თავიდან აღებული აბელის ჯგუფის ეფექტურად განსაზღვრული ქვეჯგუფისა.

იმასთან დაკავშირებით, რომ მათემატიკისა და ავტომატების თეორიის განვითარების თანამედროვე ეტაპზე ძლიერ გაიზარდა მოთხოვნილება მათემატიკური ლოგიკის სპეციალისტებისადმი, პროფ. შ. ფხაკაძე მთელ თავის ძალებს ახმარს რესპუბლიკაში მათემატიკური ლოგიკის განვითარების საქმეს.

1966 წლიდან ის იწყებს მათემატიკური ლოგიკის შესწავლას. პარალელურად თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე მიჰყავს სპეცკურსი და კითხულობს ლექციებს მათემატიკურ ლოგიკაში. ამასთან, 1969 წელს, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტთან არსებულ გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში აკად. ილია ვეკუასა და ინსტიტუტის ადმინისტრაციის ხელშეწყობით პირველად რესპუბლიკაში ხსნის მათემატიკური ლოგიკისა და ალგორითმების თეორიის განყოფილებას, რომელსაც ძირითადად აკომპლექტებს თავისივე მოწაფეებით. და აქაც, მიუხედავად სპეციალობის ცვლილებასთან დაკავშირებული სირთულეებისა, პროფ. შ. ფხაკაძე ჰქმნის ახალ ორგინალურ მიმართულებას მათემატიკურ ლოგიკაში. ეხლაც, მათემატიკური ლოგიკისა და მეთოდოლოგიის განყოფილებაში, განყოფილებაში რომელსაც ამჟამად მისი მოწაფე და თანამიმდევარი ხიმურ რუხაია ხელმძღვანელობს, კვლევები მიმდინარეობს მის მიერ მონიშნული და შექმნილი მიმართულებით.

პროფ. შ. ფხაკაძის შედეგები აღნიშნული მიმართულებით ძირითადად განთავსებულია მონოგრაფიაში "აღნიშვნათა

თეორიის ზოგიერთი საკითხები". ეს ნაშრომი, რომელსაც დიდი თეორიული და პრაქტიკული ღირებულება აქვს, ფაქტიურად ქმნის შემამოკლებელ სიმბოლოთა თეორიას, რომელიც აქამდე არსებობდა მხოლოდ როგორც ერთი ფრაგმენტი განსაზღვრებათა თეორიისა. ნაშრომში მოძებნილია შემამოკლებელ სიმბოლოთა შემომტანი გარკვეული აზრით რაციონალური სისტემა, შემუშავებულია ტერმინოლოგია და დამტკიცებულია ძირითადი თეორემები შემამოკლებელ სიმბოლოთა და შემოკლებულ ფორმათა ძირითადი თვისებების შესახებ. გარდა ამისა, მის მიერ დასმული რიგი სერიოზული ამოცანების საფუძველზე მისი მოწაფეები ეხლაც აგრძელებენ შემამოკლებელ სიმბოლოთა თეორიის შემდგომ განვითარებას.

ამ მიმართულებით პროფ. შ. ფხაკაძისა და მისი მოწაფეების შედეგებით დაინტერესებულები იყვნენ არა მხოლოდ თეორეტიკოსები არამედ მათემატიკის გამოყენებით დარგთა სპეციალისტებიც. ამ შედეგების საფუძველზე დაიდო ხელშეკრულება გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტსა და უკრაინის მეცნიერებათა აკადემიის კიბერნეტიკის ინსტიტუტს შორის, რომელიც ითვალისწინებდა თანამშრომლობას გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის მათემატიკური ლოგიკისა და ალგორითმების თეორიის განყოფილებასა და უკრაინის მეცნიერებათა აკადემიის კიბერნეტიკის ინსტიტუტის ციფრულ ავტომატთა განყოფილებას შორის.

ზემოთ აღნიშნული მონოგრაფიისა და პროფ. შ. ფხაკაძის მოწაფეთა იმდროინდელი შედეგების შესახებ უკვე 1978 წელს მოხსენებული იქნა საკავშირო სიმპოზიუმზე "ხელოვნური ინტელექტი და გამოკვლევათა ავტომატიზაცია მათემატიკაში" (ქ. კიევი) და 1979 წელს გოტლობ ფრეგეს ხსოვნისადმი მიძღვნილ კონფერენციაზე (ქ. იენა). ამ მოხსენებათა შედეგად გამოკვეთილმა ინტერესებმა განაპირობეს შემდგომი გაფართოება სამეცნიერო კონტაქტებისა. ასე მაგალითად, სწორედ ამ

მოხსენებათა საფუძველზე და შემდგომ ჩამოყალიბდა მჭიდრო კონტაქტი ადგილობრივ ლოგიკოსთა ჯგუფსა და ირკუტსკელი მატემატიკოსების ჯგუფს შორის, რომელსაც ხელმძღვანელობდა აკადემიკოსი ვ. მატროსოვი.

აღნიშნული მონოგრაფიით განსაზღვრული მიმართულების მნიშვნელობას ადასტურებს ფ. ვან რამსდოკის სადოქტორო დისერტაციაც (1996 წ. ამსტერდამი), სადაც ფხაკაძისეული შემამოკლებელ სიმბოლოთა თეორია, ცნობილი მათემატიკოსის პ. აქსელის ნაშრომთან ერთად, შეფასებულია როგორც ერთ-ერთი პირველწყარო თერმთა გადაწერის დაბმულცვლადებიანი შემთხვევისათვის.

პროფ. შ. ფხაკაძე დაძაბულ სამეცნიერო კვლევით მუშაობას კარგად უთავსებდა პედაგოგიურ საქმიანობას. ათ წელზე უფრო მეტი ხნის განმავლობაში იგი მუშაობდა საქართველოს პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში უმაღლესი მათემატიკის კათედრის პროფესორის თანამდებობაზე (1962-1972 წლები), 1962 წლიდან კითხულობდა ლექციებს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, სადაც აგრეთვე ხელმძღვანელობდა ასპირანტებს და მაძიებლებს. მის მოწაფეთა შორის არის ორი მეცნერებათა დოქტორი (ს. ხარაზიშვილი და რ. ომანაძე) და ექვსი მეცნიერებათა კანდიდატი (მ. თეთრუაშვილი, ხ. რუხაია, გ. კობზევი, ზ. ხასიდაშვილი, ო. ჭანკვეტაძე და თ. კუცია).

უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემეტიკის ფაკულტეტის სტუდენტები და ასპირანტები დღესაც სარგებლობენ მის მიერ შექმნილი სახელმძღვანელოებით. ამ მიმართულებით მისი უკანასკნელი ნაშრომი "მათემატიკური ლოგიკა-საფუძვლები" გამოქვეყნების პროცესშია. (1996 წელს გამოვიდა მისი პირველი ტომი, მეორე ტომი მზადაა გამოსაცემად).

ბატონი შალვა აქტიურად მონაწილეობდა ქვეყნის საზოგადოებრივ ცხოვრებაშიც. იგი წლების განმავლობაში იყო

მთელი რიგი სამეცნიერო საბჭოების, მათ შორის სპეციალიზირებულ სადოქტორო და საკანდიდატო საბჭოების წევრი. ის იყო საქართველოში მათემატიკისა და მექანიკის პრობლემური საბჭოს წევრი, კერძოდ ამ საბჭოს მათემატიკური ლოგიკის სექციის თავჯდომარე და მეთოდიკის სექციის წევრი. გარდა ამისა, იგი იყო ვ.მ. კომაროვის(ამჟამად თ. გეგელიას) სახელობის სკოლა—ინტერნატის მზრუნველთა საბჭოს წევრი.

ხანგრძლივი სამეცნიერო და პედაგოგიური მოღვაწეობის გამო მას 1967 წელს მიენიჭა მეცნიერებათა დამსახურებული მოღვაწის წოდება, ხოლო 1979 წელს ბატონ შალვას, მისი სამოცწლოვანი იუბილის აღსანიშნავად, გადაეცა ივ. ჯავახიშვილის სახელობის საპატიო მედალი.

პროფ. შ. ფხაკაძის მეცნიერული მოღვაწეობის მოკლე მიმოხილვა

პროფესორ შალვა სამსონის ძე ფხაკაძის შრომების პირველი ციკლი ეძღვნება ინტეგრალთა თეორიას. ამ ნაშრომთა შედეგები ძირითადად შედიან შრომაში "О повторных интегралах" (თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები ტ.20), რომელიც წარმოადგენს მისი საკანდიდატო დისერტაციის მოკლე გადმოცემას. მასში შეისწავლება სიბრტყის სიმრავლეთა მახასიათებელი ფუნქციებიდან აღებული განმეორებითი ინტეგრალებისათვის ინტეგრების რიგის შეცვლის შესახებ ფუბინის თეორემის სამართლიანობის საკითხი, როცა სიმრავლე საკოორდინატო ღერძის თითოეულ პარალელთან იკვეთება ბორელის აზრით ზომად სიმრავლეზე. საკმაოდ რთული მსჯელობით ავტორი ღებულობს შემდეგ კონკრეტულ შედეგს: თუ აღნიშნული კვეთები ბორელის ნულოვანი კლასის სიმრავლეებია, მაშინ შესაბამისი მახასიათებელი ფუბინის თეორემა სამართლიანია. ეს შედეგი გარკვეული აზრით საბოლოოა. სახელდობრ, სათანადო მაგალითის დახმარებით ნაჩვენებია, რომ იმ შემთხვევაში, როცა აღნიშნული კვეთები

ბორელის პირველი კლასის სიმრავლეებია, მაშინ ფუბინის თეორემა, საზოგადოდ, არაა სამართლიანი.

ნაშრომთა მეორე ციკლი ეძღვნება სიმრავლეთა ზოგად თეორიას და ზომის თეორიას. ამ შრომების ნაწილი შედის მის სადოქტორო დისერტაციაში "К Теорий Лебегевской меры" (თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები, ტ. 25, გვ. 3-271), რომელიც დიდი ხანია იქცა კლასიკურ მონოგრაფიად ინვარიანტულ ზომათა თეორიაში. მასში ძირითადად შედის ამ მიმართულებით ადრე გამოქვეყნებული ავტორის ყველა ნაშრომი. იგი წარმოადგენს ლებეგის ტიპის ზომების თეორიაში ფუნდამენტურ გამოკვლევას. მასში შემოტანილია მეტად პროდუქტიული ცნება, სახელდობრ -- აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლის ცნება. ეს ცნება საფუძველია მთელი სადისერტაციო ნაშრომისა და, აგრეთვე, შემდეგში მისი მოწაფეების მიერ შესრულებული ზოგიერთი ფრიად მნიშვნელოვანი ნაშრომებისა.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ამ პროდუქტიული ცნების მოძებნამ მოითხოვა ღრმა გამოკვლევის ჩატარება. ევკლიდურ R^n ($n=1,2$) სივრცის ისეთ სიმრავლეთა ცნების შემოტანის იდეა, რომელთა უგულებელყოფა შეიძლება ზომის თვალსაზრისით, სხვა ავტორებსაც ჰქონდათ. მაგალითად, იხილავენ "უპირობოდ ნული ზომის სიმრავლის" ცნებას და სხვა. მაგრამ ისინი არ აღმოჩნდნენ პროდუქტიულები და ვერ შეძლეს რამდენადმე საგრძნობი როლის შესრულება ზომის თეორიის განვითარებაში. სხვა ავტორებისაგან განსხვავებით შ. ფხაკაძე აბსოლუტურად ნული ზომის სიმრავლის ცნების განსაზღვრისას შემზღუდავ პირობებს ადებს არა მარტო განსახილველ A სიმრავლეს, არამედ ყოველ სიმრავლეს, რომელიც A-სთან ერთად "ბუნებრივად" უნდა იყოს აბსოლუტურად ნულზომის. სახელდობრ, მან გამოიკვლია აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლის ცნების 4 ვარიანტი და აჩვენა პირველი სამი

მათგანის არაპროდუქტიულობა. პირველ ვარიანტში შემზღუდავი პირობები ''იყოს ნული ზომის'' და ''იყოს დადებითი ზომის'' (ლებეგის ტიპის ზომათა კლასში) ედება მხოლოდ განხილულ $A \subset R^n$ სიმრავლეს, მეორე ვარიანტში--A სიმრავლის თითოეულ ნაწილს, მესამე, შესაბამისად მეოთხე, ვარიანტში –A სიმრავლის თითოეულ სასრულ, შესაბამისად თვლად, კონფიგურაციას. (A' სიმრავლეს ეწოდება A სიმრავლის სასრული, შესაბამისად თვლადი, კონფიგურაცია, თუ იგი წარმოიდგინება სასრული, შესაბამისად თვლადი, რიცხვი სიმრავლეთა გაერთიანების სახით, რომელთაგან თითოეული A სიმრავლის რაიმე ნაწილის კონგრუენტულია). მტკიცდება რომ პირველი სამი ვარიანტის შემთხვევაში ორი აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლის გაერთიანება შეიძლება დაემთხვეს მთელ სივრცეს.

მეოთხე ვარიანტის შემთხვევაში, რომელიც შ. ფხაკაძემ მიიღო საბოლოო განსაზღვრებად, აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლეებს აქვთ რიგი მნიშვნელოვანი თვისება. ასეთი სიმრავლეთა კლასი ჩაკეტილია სასრულ გაერთიანებათა მიმართ და არ არის ჩაკეტილი თვლად გაერთიანებათა მიმართ. ორივე გარემოება მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ლებეგის ტიპის ზომების სხვადასხვა გაგრძელებების მოძებნის დროს, ამასთან, უკანასკნელი გარემოება შესაძლებელს ხდის გადაწყვეტილი იქნას სერპინსკის პრობლემები ამოხსნადი კლასების გაფართოებადობისა და ლებეგის ტიპის ზომების გაგრძელებადობის შესახებ. უკანასკნელ პრობლემას შ. ფხაკაძე წყვეტს მეტად სარწმუნო ჰიპოთეზის საფუძველზე, სახელდობრ, შემდეგი ჰიპოთეზის საფუძველზე: არ არსებობს კონტინუუმის სიმძლავრეზე ნაკლები ან ტოლი მიუღწევადი კარდინალური რიცხვი. შ. ფხაკაძემ მოძებნა აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლეთა რიგი მნიშვნელოვანი მახასიათებელი თვისებები აუცილებელი და საკმარისი პირობების სახით.

თითოეული ამ პირობათაგანი შეიძლება მიღებული იქნეს როგორც საფუძველი აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლის ცნების განსაზღვრის დროს. ამ თვისებებიდან ორი შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს.

/1/ იმისათვის, რომ $A \subset R^n$ სიმრავლე იყოს აბსოლუტურად ნულზომის, აუცილებელი და საკმარისია, რომ A სიმრავლის ყოველი თვლადი კონფიგურაცია იყოს გაქრობადი. ($X \subset R^n$ სიმრავლეს გაქრობადი ეწოდება, თუ მოიძებნება ლებეგის აზრით ნულზომის სიმრავლე, რომელიც წარმოიდგინება $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ სახით, სადაც ყოველი X_i კონგრუენტულია X სიმრავლისა.)

/2/ იმისათვის რომ $A \subset R^n$ სიმრავლე იყოს აბსოლუტურად ნულზომის, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ლებეგის ტიპის ნებისმიერი μ ზომისათვის არსებობდეს მისი ისეთი გაგრძელება μ_1, რომლისთვისაც გვაქვს $\mu_1(A)=0$.

/1/ თვისების საფუძველზე შ. ფხაკაძემ ააგო არაზომადი აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლე R^n სივრცეში $n=1,2$ შემთხვევებში. ამასთან დაკავშირებით იგი სვამს ამოცანას არა ზომადი აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლეების არსებობის შესახებ R^n სივრცეში $(n=3,4,....)$. ეს ამოცანა ამოხსნა ა. ხარაზიშვილმა, ისევ /1/ თვისების საფუძველზე. განხილულ შრომაში შ.ფხაკაძე სვამს სხვა მნიშვნელოვან ამოცანებსაც. მისი მოწაფეები წარმატებით მუშაობენ ამ ამოცანებზე. მაგალითად, მ. თეთრუაშვილმა მისი შედეგები განაზოგადა ტოპოლოგიური ჯგუფებისათვის, ა. ხარაზიშვილმა კი გარდა ზემოაღნიშნულისა ამოხსნა შ. ფხაკაძის მიერ დასმული კიდევ სამი ამოცანა.

ლებეგის ზომის სხვადასხვა თვისებების მქონე გაგრძელებათა მოძებნის მძლავრი მეთოდების შექმნა განხილული ნაშრომის ძირითადი შინაარსია. მიუხედავად ამისა,

დიდ ინტერესს იწვევს ის შედეგები, რომლებიც მიიღებიან სიმრავლეთა ზოგად თეორიაში, შ.ფხაკაძის მიერ განხილულ ნაშრომში შექმნილი მეთოდების გამოყენებით: არსებითად ზოგადდება სხვადასხვა მიმართულებით ვ. სერპინსკის ერთი შედეგი თითქმის ინვარიანტული ნული ზომის, შესაბამისად პირველი კატეგორიის, სიმრავლის არსებობის შესახებ. იგება რამდენიმე მნიშვნელოვანი მაგალითი და მტკიცდება ზოგადი თეორემები დაფარვების შესახებ. გარდა ამისა განისაზღვრება თითქმის სავსებით არასიმეტრიული სიმრავლის ცნება და იგება სივრცის დაყოფა სავსებით არასიმეტრიულ საკუთრივ თითქმის Π^n-ინვარიანტულ სიმრავლეებად. ამ შედეგებზე დაყრდნობით არსებითად ზოგადდება პ.ერდოშის შედეგები R^n სივრცეში ზოგიერთი სახის წრფივი განტოლებების ამონახსენთა რიცხვის შესახებ. მიიღება სხვა მნიშვნელოვანი შედეგებიც, რომელთა შორისს განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს მის სადოქტორო დისერტაციაში განხილული (6.33) თეორემა.

თავის რეცენზიაში დისერტაციის შესახებ აკადემიკოსი ნოვიკოვი წერდა-"ლებეგის ტიპის ზომათა თეორიაში წამოიჭრა რიგი საკითხებისა, რომელთა შორის უმნიშვნელოვანესია სერპინსკის მიერ დასმული პრობლემა ნებისმიერი ლებეგის ტიპის ზომის ნებისმიერი გაგრძელებისათვის მისი სხვა გაგრძელების არსებობის შესახებ. ზომათა თეორიაში გაგრძელებადობის პრობლემა ერთ-ერთი ფუნდამენტურია, და ბუნებრივია, ეს საკითხი იწვევდა და იწვევს დიდ ინტერესს. მიუხედავად ამისა, დასმული ამოცანების ამოხსნა, ლებეგის ტიპის ზომათა გაგრძელებადობის თაობაზე, არ ჩანდა და წინაც არ მიიწევდა. განსახილველი დისერტაცია წარმოადგენს მნიშვნელოვან წინგადადგმულ ნაბიჯს აღნიშნული მიმართულებით, უფრო მეტიც, მე ვიტყოდი, მან თეორია დაძრა მკვდარი წერტილიდან. მრავალრიცხოვანი შედეგები ავტორისა შეიძლება დავყოთ შემდეგ ჯგუფებად.

1. მოძებნილია ლებეგის ტიპის ზომების გაფართოების ზოგადი მეთოდები და გაფართოებულია ამოხსნადი სიმრავლეთა კლასები.

2. ზომების განზოგადება იმ აზრით, რომ ჩვეული მოთხოვნები ინვარიანტულობის შესახებ შეცვლილია მოთხოვნებით ზომათა შენარჩუნებისათვის ჯგუფის წარმომქმნელ სივრცეთა ურთიერთცალსახა გარდაქმნებისათვის.

3. ზომის სტრუქტურის შესწავლა მისი შემადგენელი ზომებად დაშლის გზით და წინასწარ განსაზღვრული კანონიკური გაშლის მოძიება.

4. გამოყენებანი ავტორის მიერ განვითარებული მეთოდებისა ზომათა თეორიის ჩარჩოების გარეთ მდებარე საკითხებისათვის.

პირველი წრე მინიშნებული საკითხებისა ქმნის საკმარისად ზოგად თეორიას ლებეგის ტიპის ზომათა გაგრძელებადობის შესახებ. ამ კვლევებში ავტორი იყენებს რიგ უმნიშვნელოვანეს ცნებებს. ასე მაგალითად, აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლის ცნება, საკუთრივ თითქმის ინვარიანტული სიმრავლის ცნება და ა.შ. ზოგიერთი ამ ცნებათაგანი ჩანასახური სახით გვხვდება სხვა ავტორებთანაც. თუმცა, დისერტაციაში ისინი განვითარებულნი არიან სისტემატურად და ეჭვი არ არის რომ შემდგომშიც ისინი არაერთგზის იქნებიან გამოყენებულნი.

დისერტაციაში შექმნილი, ზომათა გაგრძელების თეორია, რა თქმა უნდა, არ იქნებოდა სრულყოფილი, რომ მისი მეშვეობით არ ხერხდებოდეს წინსვლა მიმართულებით დასმული და ზემოთ ხაზგასმულ პრობლემათა გადაჭრის საქმეში. ცენტრალური ამ პრობლემათა შორის არის სერპინსკის პრობლემა არაგაგრძელებადი ზომის არსებობის შესახებ. დისერტაცია იძლევა შემდეგ პასუხს დასმულ კითხვაზე: თითოეული $\mathfrak{I}^n$-ზომა გაგრძელებადია, თუ არ არსებობს

კონტინუუმზე ნაკლები მიუღწევადი კარდინალური რიცხვი. შემდგომ აანალიზებს რა ხსენებულ პასუხს, პ. ს. ნოვიკოვი წერს- "მე ვთვლი, რომ სერპინსკის პრობლემა გადაწყვეტილია საკმარისი სისრულით.

ავტორი გვიჩვენებს, რომ თუ $\mathfrak{I}^n$-ზომის აქსიომებს დავუმატებთ (A) და (B) სავსებით ბუნებრივი აქსიომებიდან ერთ-ერთს, მაშინ ამ ტიპის ზომებისათვის სერპინსკის პრობლემა იხსნება სრული სისრულით ყოველგვარი ჰიპოთეზების გარეშე. ზუსტად ასევე, ყოველგვარი ჰიპოთეზების გარეშე მტკიცდება გაფართოებადობა ნებისმიერი ამოხსნადი კლასის."

დასასრულს ნოვიკოვი წერს- "... განსახილველი შრომა წარმოადგენს ფრიად მნიშვნელოვან წინსვლას სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს სფეროში. მასში შექმნილია ძლიერი მეთოდები რომლებიც საშუალებას იძლევიან გადავლახოთ დიდი სიძნელეები".

ოფიციალური ოპონენტი, ლიაპუნოვი, წერდა- "ნაშრომი წარმოადგენს მკაფიო მოვლენას სიმრავლეთა თეორიაში".

პროფესორი ვ. ა. როხლინი თავის რეფერატში აღნიშნული ნაშრომის შესახებ, წერს "ნაშრომი წარმოადგენს ფუნდამენტურ კვლევას მიძღვნილს ლებეგის ტიპის ზომათა ინვარიანტული გაგრძელებადობის საკითხისადმი. ცნობილია, რომ ასეთი გაგრძელებები არსებობს, თუმცა, აქამდე ჩვენი ცოდნა მათზე იყო საკმაოდ ღარიბი და ძირითადად იფარგლებოდნენ ცალკეული მაგალითებით. ავტორმა შეძლო დაემტკიცებია მათზე სისტემური თეორიის შემქმნელი რიგი ზოგადი ხასიათის სტრუქტურული თეორემები".

შრომების მეორე ციკლის მეორე ნაწილში, რომელიც შედგება რვა ნაშრომისაგან, შ. ფხაკაძე აგრძელებს კვლევას იმავე მიმართულებით და იღებს ღრმა შედეგებს. განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს შედეგები, რომელიც მიღებულია ნაშრომში

“Один общий метод построения” (თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები, 1963, 29, 103–119). მასში მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა აბელის ჯგუფის ეფექტურად განსაზღვრული ისეთ ქვეჯგუფთა აგების ერთი ზოგადი მეთოდი, რომელთაც აქვთ ნული ზომა და კონტინუალური სიმრავლე სიმეტრიული მოსაზღვრე კლასებისა.

ეს მეთოდი იძლევა შესაძლებლობას აიგოს ასეთი ქვეჯგუფების ინდივიდუალურ მაგალითთა უსასრულო რაოდენობა. მტკიცდება, რომ ყველა ასეთ ქვეჯგუფთა სიმრავლის სიმძლავრე არის 2^{χ}. ამასთან, ნაჩვენებია, რომ თითოეულ ასეთ ქვეჯგუფს აქვს ფრიად პარადოქსალური თვისება. მისგან ორჯერ შეკუმშვით მიღებული სიმრავლე (იშლება) იხლიჩება კონტინუალურ რაოდენობა სიმრავლეებად, რომელთაგან თითოეული ამ სიმრავლის კონგრუენტულია. ბუნებრივად იშმის პრობლემა ასეთ სიმრავლეთა ადგილის შესახებ ნ. ლუზინის სკოლის მიერ აგებულ ეფექტურ სიმრავლეთა შორის. სახელდობრ, ძალზე საინტერესოა გამოვარკვიოთ, გამოდის თუ არა ასეთი სიმრავლეები პროექციულ სიმრავლეთა კლასის ფარგლებს გარეთ.

პროფ. შ. ფხაკაძის შრომების შემდეგი ციკლის შედეგები ძირითადად გადმოცემულია მონოგრაფიაში “Некоторые вопросы теории обозначений“ /თბილისის სახ. უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1977/. მასში შემოიტანება და შეისწავლება შემამოკლებელ სიმბოლოთა განმსაზღვრელი წესები. ნაშრომი მიეკუთვნება მათემატიკურ ლოგიკას. მიუხედავად ამისა ეს მონოგრაფია მსგავსია ზემოთ განხილულისა იმით, რომ აქაც თავიდანვე განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა ძირითად ცნებათა შემუშავებას. ამ შემთხვევაში შ. ფხაკაძის გამოკვლევათა აღნიშნული თავისებურება ვლინდება განსაკუთრებული ძალით. მასთან,

უნდა აღინიშნოს ისიც რომ ფრიად მნიშვნელოვანია გამოკვლევის იდეური მხარე.

ფორმალური მათემატიკის განვითარებამ მიგვიყვანა მნიშვნელოვან აღმოჩენებამდე, მნიშვნელოვან შედეგებამდე. მიღებულია რიგი მნიშვნელოვანი, როგორც ზოგადი, ისე კონკრეტული ხასიათის შედეგებისა, რომლებიც განეკუთვნებიან არა მარტო მათემატიკის საფუძვლებს, არამედ აგრეთვე მის სპეციალურ დარგებსაც. ასეთი შედეგების მიღება ფორმალური მათემატიკის მეთოდების გამოუყენებლად მათემატიკის განვითარების თანამედროვე ეტაპზე ითვლება საეჭვოდ. ამიტომ ფორმალური მათემატიკის მეთოდების დაუფლება მეტად მნიშვნელოვანია მთელი მათემატიკის განვითარებისათვის. მიუხედავად ამისა, ამჟამად მათემატიკის უმეტესი დარგებისა ვითარდება შინაარსულ დონეზე. ეს გამოწვეულია იმ გარემოებით, რომ ფორმალური მათემატიკის მეთოდების დაუფლება ძნელია, რამდენადაც — და ეს მთავარია — ჯერჯერობით არა გვაქვს ფორმალური მათემატიკური სისტემების სრულყოფილი გადმოცემები. ამჟამად არსებული გადმოცემების სრულყოფისათვის საჭიროა ღრმა მეცნიერული გამოკვლევები.

ფორმალური მათემატიკური სისტემების ერთ-ერთი არსებითი თავისებურებაა თეორიის ალფაბეტის შეზღუდვა და მისი მინიმუმამდე დაყვანა. ამის შედეგად თეორიის წინადადებათა კლასი ხდება მთლიანობაში განხილვისათვის ხელმისაწვდომი. ზუსტად განისაზღვრება დამტკიცების ცნება, გარკვევით ყალიბდება რიგი მათემატიკური პრობლემებისა და ადვილდება მათი გადაწყვეტა. თანამედროვე მათემატიკური თეორიები, რომლებიც შინაარსულ დონეზე ვითარდებიან, განიცდიან ფორმალური მათემატიკური თეორიების მეთოდების გავლენას, მათსავით ზღუდავენ თეორიის ალფაბეტს, დაჰყავთ

იგი მინიმუმამდე და ძირითადად ინტუიციურ ცნებებს უთანადებენ ზუსტ მათემატიკურ ცნებებს. ასე შემოაქვთ, მაგალითად, ალგორითმის მათემატიკური ცნება და მასთან დაკავშირებული ცნებები.

თუმცა თეორიის ალფაბეტის შეზღუდვას თეორიულად მნიშნელოვანი უპირატესობა აქვს, მიუხედავად ამისა, იგი იწვევს არსებით სიძნელეებს. სახელდობრ, ჩვენ რომ მხოლოდ თეორიის შეზღუდული ალფაბეტის სიმბოლოებით გვესარგებლა იძულებული ვიქნებოდით გვეწერა უაღრესად გრძელი ფორმები (ფორმულები და ტერმები), ასეთი ფორმების როგორც ჩანაწერის სახით წარმოდგენა ისე ამ წარმოდგენის საფუძველზე მათი შინაარსის აღქმა პრაქტიკულად შეუძლებელია. ამ სიძნელეების გადასალახავად შემოაქვთ შემამოკლებელი სიმბოლოები.

საკმაოდ მდიდარი თეორიის შემთხვევაში (როგორიცაა მაგალითად, სიმრავლეთა თეორია) შემამოკლებელ სიმბოლოთა განსაზღვრელ წესებს ჩვეულებრივ არ ზღუდავენ ან მცირედ ზღუდავენ, ისე რომ შეუძლებელია შემამოკლებელ სიმბოლოთა და შემამოკლებელ ფორმათა ზოგადი თვისებების დადგენა. ამიტომ, აუცილებელობის გამო, ეყრდნობიან პრინციპს, რომლის მიხედვით შემამოკლებული ფორმა განიხილება როგორც ამ შემოკლებული ფორმით აღნიშნული ფორმა. მაგრამ ამ პრინციპის სრული განხორციელება შეუძლებელია ზემოთ მითითებული სიძნელეების გამო. აქედან გამომდინარეობს აღნიშნული პრინციპის შეცვლის და მის ნაცვლად ისეთი პრინციპის მიღების აუცილებლობა, რომელიც გულისხმობს შემოკლებულ ფორმებზე უშუალო ოპერირების საფუძველზე გაკეთდეს დასკვნა ძირითადი თეორიის შესაბამის ფორმებზე. ამისათვის, თავის მხრივ, აუცილებელია გვქონდეს შემოკლებულ ფორმებზე ოპერირების ზოგადი კანონები. ამიტომ აუცილებელია დავადგინოთ შემამოკლებელ სიმბოლოთა და

შემოკლებულ ფორმათა ზოგადი თვისებები. ასეთი ზოგადი კანონების დადგენისათვის აუცულებელია შემამოკლებელი სიმბოლოსა და შემოკლებული ფორმის ინტუიციური ცნებები შევზღუდოთ ზუსტი მათემატიკური ცნებებით, ე.ი. აუცილებელია მათემატიკურად განვსაზღვროთ შემამოკლებელი სიმბოლოს ცნება მათი შემომტანი წესების შეზღუდვის საფუძველზე. ამასთან, მოითხოვება უკანასკნელი ამოცანის რაციონალური გადაწყვეტის მოძებნა.

ნაშრომში მოძებნილია საკმაოდ რაციონალური სისტემა შემამოკლებელ სიმბოლოთა განმსაზღვრელი წესებისა კლასიკურ ფორმალურ და შინაარსულ მაათემატიკური თეორიების შემთხვევაში. აღნიშნული სისტემა რაციონალურია შემდეგი აზრით. ერთის მხრივ, იგი იმდენად ზოგადია, რომ მისი დახმარებით შეიძლება შემოვიტანოთ კლასიკურ ფორმალურ თეორიებში გამოყენებული თითქმის ყველა შემამოკლებელი სიმბოლო, მეორეს მხრივ კი, ამ წესებით შემოტანილი შემამოკლებელი ფორმები ფლობენ ისეთ მდიდარ თვისებებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ მნიშვნელოვან თავისუფლებას შემოკლებულ ფორმებზე ოპერირებისას. სახელდობრ, მათემატიკური მსჯელობები შეიძლება გადავიტანოთ შემამოკლებელი სიმბოლოებით გაფართოებულ თეორიებში ბუნებრივი ზოგადი კანონების საფუძველზე.

ასეთი (ფორმალური ან შინაარსული) მათემატიკური თეორიის აგებას, რომელსაც ექნება შეზღუდული ალფაბეტი და, ზემოთ აღნიშნული აზრით, შემამოკლებელ სიმბოლოთა შემოტანის რაციონალური წესები, აქვს დიდი თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა. იგი იძლევა იმის შესაძლებლობას, რომ ძირითადი თეორიის შესასწავლად ეფექტურად იქნეს გამოყენებული შემამოკლებელი სიმბოლოების დამატებით მიღებული მისი სხვადასხვა გაფართოებები. იგი ღრმად ავლენს სხვადასხვა მათემატიკურ თეორიებს შორის არსებულ

კავშირებს. ამასთან, იგი პრაქტიკულად აუცილებელია მათემატიკური გამოკვლევების ავტომატიზაციისათვის და ისეთი სპეციალური სისტემების შექმნისათვის, რომლებსაც შეეძლებათ მათემატიკური ტექსტის დამუშავება.

ამის გარდა ნაშრომში შეისწავლება შემოკლებული ფორმიდან ფორმის აღდგენის ალგორითმული პროცესები. საკმაოდ ბუნებრივად შემოტანილ ალგორითმთა კლასში მოძებნილია შემოკლებული ფორმიდან ფორმის აღდგენის ალგორითმი ბიჯების მინიმალური რიცხვით. შეისწავლება აგრეთვე შემოკლებული სიმბოლოებისა და შემოკლებულ ფორმათა სხვადასხვა რიცხვითი მახასიათებლები და მოძებნილია ამ რიცხვითი მახასიათებლების გამოსაანგარიშებელი ალგორითმები. განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს, რომ ნაშრომში შემოტანილია კარგად მოფიქრებული მოხერხებული ტერმინოლოგია და ცნებების სისტემა. სახელდობრ, შემოტანილია შემამოკლებელ სიმბოლოთა და შემოკლებულ ფორმათა მიმდევრობების სხვადასხვა ტიპი, შემოკლებული ფორმიდან ფორმის აღდგენის სხვადასხვა პროცესი, შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრების კერძო შემთხვევების სხვადასხვა ტიპი და სხვა.

ზემოთქმულიდან ჩანს, რომ პროფესორ შ. ფხაკაძის მონოგრაფია წარმოადგენს მათემატიკური ლოგიკის მნიშვნელოვან შენაძენს და ღრმა გამოკვლევას ამ დარგში. იგი მიეკუთვნება მათემატიკის საფუძვლებს. ამასთან, მას დიდი თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. იგი წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ მონოგრაფიების შექმნისას ფორმალური ან შინაარსული მათემატიკის იმ დარგებში, რომლებიც სარგებლობენ შეზღუდული ალფაბეტით. იმ ფორმალური ან შინაარსული მათემატიკური თეორიის გადმოცემისას, რომელიც სარგებლობს შეზღუდული ალფაბეტით, უნდა ვისარგებლოთ I-IV ტიპის, II′ და IV′

შემამოკლებელი სიმბოლოებით. ასეთი შემამოკლებელი სიმბოლოებისათვის ერთხელ და სამუდამოდ დადგენილია მნიშვნელოვანი თვისებები, რომლებიც გვიადვილებს მათემატიკური მსჯელობების ჩატარებას. ამასთან შესაძლებელი ხდება ის მსჯელობები, რომლებიც ეყრდნობა ინტუიციას, შეიცვალოს ზუსტი მათემატიკური მსჯელობებით.

მონოგრაფიაში აღნიშნული საკითხების შემდგომი შესწავლა ავტორის მიერ მითითებული მიმართულებით ძალზე მნიშვნელოვანია.

განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს, რომ მიღებული შედეგების საფუძველზე იქმნება კარგად ჩამოყალიბებული დამოუკიდებელი თეორია - აღნიშვნათა თეორია, რომელიც აქამდე არსებობდა მხოლოდ როგორც ნაწილი, ერთი ფრაგმენტი, უფრო ზოგადი თეორიისა - განსაზღვრებათა თეორიისა.

დასასრულს შევნიშნოთ, რომ განხილული მონოგრაფიის შედეგებით ინტერესდებიან არა მარტო თეორეტიკოსები, არამედ აგრეთვე გამოყენებითი მათემატიკის სპეციალისტები, რომლებიც მუშაობენ ავტომატების თეორიაში. ამჟამად მიმდინარეობს ინტენსიური მუშაობა მათემატიკური კვლევის ავტომატიზაციის მიზნით ისეთი ავტომატური სისტემების შექმნისათვის, რომლებიც შესძლებენ მათემატიკური ტექსტების დამუშავებას. არსებობს საკმაოდ დამაჯერებელი მოსაზრებები, რომლის მიხედვით საკმაოდ მდიდარი მათემატიკური თეორიის მხოლოდ ისეთი მათემატიკური ტექსტები შეიძლება დამუშავდეს ავტომატური სისტემების დახმარებით, რომლებიც სარგებლობენ შეზღუდული ალფაბეტით და რომლებიც შექმნილია კარგად განვითარებული აღნიშვნების თეორიის საფუძველზე.

შემდგომშიც შ. ფხაკაძე განაგრძობს კვლევას მის მიერ შექმნილი შემამოკლებელ სიმბოლოთა თეორიის განვითარების მიზნით. აქ განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს შრომა

“Некоторые задачи теории сокращающих символов” (თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის აკად. ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები ტ. 11, 1982). ამ ნაშრომში დასმულია ამოცანები და მითითებულია პერსპექტიული მიმართულებები შემამოკლებელ სიმბოლოთა თეორიაში.

პროფ. შალვა ფხაკაძის კვლევათა ამ ეტაპის უკეთ წარმოჩენის მიზნით მოგვყავს ზოგიერთი ფრაგმენტი ცნობილი რუსი მეცნიერების რეცენზიებიდან.

<u>ვ. მატროსოვი</u> - *"ჩვენი თვალსაზრისებით, ცოდნის წარმოდგენა და ეგმ-ის “აზროვნების” ეკონომიურობა (კერძოდ, ეგმ-ის მონაცემთა სტრუქტურირებისათვის ცნებებისა და თეორემების იერარქიული ორგანიზაცია და მათემატიკური ტექსტების დამუშავება) ითხოვენ და საჭიროებენ აღნიშვნათა თეორიის გამოყენებას.*

შ. ს. ფხაკაძის მონოგრაფია პირველი მცდელობაა აღნიშნული საკითხების სისტემატური შესწავლისა. საყრდენ მასალად განიხილება საკმარისად მდიდარი ენის მქონე თეორია ზოგადად აქსიომებისა და გამოყვანის წესების მინიშნების გარეშე. განსაზღვრულია შემამოკლებულ სიმბოლოთა შემომტანი შემზღუდველი პირობები. ეს იძლევა საშუალებას შემოკლებულ ფორმებზე ფორმალური ოპერირებისა ნაცვლად ოპერირებისა მათ მიერ აღნიშნულ ფორმებზე (რაც რიგ შემთხვევებში სრულად განუხორციელებელიც კია). შეისწავლება ზოგადი თვისებები შემოკლებული ფორმებისა, განისაზღვრება მოქმედებები შემოკლებულ ფორმებზე და მტკიცდება ძირითადი თეორემები მათ შესახებ. შემოკლებულ სიმბოლოთა შემომტანი წესები შერჩეულია იმ მოსაზრების გათვალისწინებით რომ მიღებულ შემოკლებულ ფორმებს ჰქონდეთ საწყისი მოცულობა საჭირო კარგი თვისებებისა, უზრუნველსაყოფად ალგებრული ჰომომორფიზმისა

შემოკლებულ ფორმებზე მოქმედებათა ალგებრისა და საყრდენი თეორიის ფორმებზე მოქმედებათა ალგებრას შორის.

ამ მოსაზრებათა გათვალისწინებით, მინიშნებული ჰომომორფიზმის ზოგადობის თვალსაზრისიდან გამომდინარე, შერჩეულია შემოკლებულ სიმბოლოთა შემზღუდავ წესთა სისტემა კლასიკური ფორმალური და შინაარსული მათემატიკური თეორიებისათვის."

ი. იანოვი - "მიუხედავათ იმისა რომ, მათემატიკური თეორიების აგებისას შემამოკლებელ აღნიშვნებს იყენებდნენ და ეხლაც გამოიყენება, სისტემატური შესწავლა აღნიშულთან დაკავშირებით წამოჭრილი საკითხებისა პირველად განხორციელებული იქნა შ.ს. ფხაკაძის ზემოთხსენებულ ნაშრომში. მათში მოცემულია მათემატიკურ თეორიებში შემამოკლებელი აღნიშვნების შემოტანისა და გამოყენებისათვის საჭირო თეორიული საფუძვლები. მნიშვნელოვანება ამ პრობლემატიკისა განპირობებულია იმ გარემოებით, რომ განვითარება და გადმოცემა ნებისმიერი, თუნდაც საკმარისად მარტივი მათემატიკური თეორიისა პრაქტიკულად შეუძლებელია ამ თეორიის დამატებითი სიმბოლოებითა და მათი განმსაზღვრელი აქსიომებით გაფართოების გარეშე, რომლებიც თეორიაში შემამოკლებელი სიმბოლოების როლს თამაშობენ. ამასთან წინა პლანზე დგება რიგი მნიშვნელოვანი ამოცანებისა, მაგალითად, როგორიცაა საკითხი გაფართოებათა კონსერვატიულობის შესახებ, ე.ი. საკითხი იმის თაობაზე, გადადის თუ არა გაფართოებულ თეორიაში საწყისი თეორიის ენის ფარგლებში ჩამოყალიბებული თეორემათა (სიმრავლე) კლასი უცვლელად, აგრეთვე საკითხი შემოკლებულ და არაშემოკლებულ აღნიშვნათა ურთიერთკავშირების შესახებ, და ა.შ. შ.ს. ფხაკაძის ნაშრომი შემამოკლებული სიმბოლოების განსაზღვრებათა და კლასიფიცირებათა მეშვეობით იძლევა საშუალებას მთელ რიგ

შემთხვევებში საკმარისად მივიღოთ პასუხები ზემოთწამოჭრილი სახის საკითხებზე.

ნაშრომის საფუძველმდებითმა იდეებმა მიიღეს შემდგომი განვითარება შ.ს. ფხაკაძის მოწაფეთა შრომებში. პერსპექტივაში ნაშრომის კონკრეტული განვითარებანი ამ მიმართულებით შეიძლება იქნეს გამოყენებული ხელოვნური ინტელექტის პრობლემატიკასთან დაკავშირებული რიგი ამოცანების გადაწყვეტისას”.

ს. ვ. იაბლონსკი - *პროფ. შ.ფხაკაძის მიერ განვითარდა ორიგინალური მიმართულება, რომელიც ეხება ფორმალური თეორიების საფუძვლებს. თეორიის აგებისას ჩვენ, როგორც წესი, ვეყრდნობით შეზღუდულ ალფაბეტს და ამიტომ იძულებულნი ვართ გამოვიყენოთ შემამოკლებელი სიმბოლოები, რომლებიც არ ეტევიან თეორიის ძირითადი ალფაბეტის ფარგლებში. ფხაკაძისეული აღნიშვნათა თეორია იძლევა ზოგად მიდგომებს შემამოკლებელ ფორმებზე ფორმალური ოპერირებისა, ამას კი გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს მათემატიკური ლოგიკის ფარგლებში მათემატიკური თეორიების და ხელოვნური მათემატიკური ენების აგების საქმეში.*

ს. ნიკოლსკი - *„მისი მონოგრაფია “აღნიშვნათა თეორიის ზოგიერთი საკითხები” არა მხოლოდ ჰქმნის ახალ განვითარებად მიმართულებას, არამედ იძლევა დიდ პერსპექტივებს მათემატიკური ტექსტების ავტომატური მეთოდებით დამუშავების საქმეში.“*

განსაკუთრებული ინტერესი გამოიწვია შ. ფხაკაძის გამოსვლამ ჩორჩის თეზისის კრიტიკით ლოგიკოსთა VI საკავშირო კონფერენციაზე. ამ მიმართულებით მიღებულ შედეგებს ძირითადად მოიცავს ნაშრომი „Один пример интуитивно выслимой всюду определенной функции и тезис Черча“ (თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

გამომცემლობა 1984) და ჯერ არგამოქვეყნებული ნაშრომი სათაურით „Усыленный пример интуитивно вычыслимой всюду определенной функции и тезис Черча". ამ ნაშრომებთან დაკავშირებით უნდა აღინიშნოს შემდეგი:

ნაშრომში განიხილება ძლიერ მნიშვნელოვანი და პრიციპული საკითხი ჩორჩის თეზისის სამართლიანობის შესახებ. ეს თეზისი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ნებისმიერი ინტიუციურად გამოთვლადი ფუნქცია არის რეკურსული (ან ასე: ინტიუციურად გამოთვლადი ფუნქციათა კლასი ემთხვევა რეკურსიულ ფუნქციათა კლასს). მხედველობაშია $N^n \rightarrow N$ ტიპის ფუნქციები, სადაც N-ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა. ცნობილია ჩორჩის თეზისის სასარგებლო რიგი მოსაზრებებისა, რომელთა საფუძველზე თითქმის ყველა ლოგიკოსი ჩორჩის თეზისს თვლის სამართლიანად. ჩორჩის თეზისის საფუძველზე მტკიცდება ბევრი ძლიერი შედეგი როგორც თეორიისათვის, ისე პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვანი ალგორითმული პრობლემების ამოუხსნებადობის შესახებ. ამ თეზისის გამოყენებით მტკიცდება, მაგალითად, თეორიულად ძლიერ მნიშვნელოვანი შედეგი, ფორმალური არითმეტიკის ფორმალურად არასისრულის შესახებ. ამიტომ, გასაგებია, რომ, ჩორჩის თეზისის უარყოფას ექნება ძლიერ დიდი როგორც თეორიული, ისე პრაქტიკული, მნიშვნელობა, რამდენადაც ჩორჩის თეზისის სამართლიანობის შესახებ არსებული რწმენა ფაქტიურად კრძალავს ასეთი პრობლემების შემდგომ კვლევას.

ხსენებულ ნაშრომში ავტორი ორგინალური მეთოდის გამოყენებით, რომელსაც იგი უწოდებს "რთულ დიაგონალურ მეთოდს", აგებს ინტიუციურად გამოთვლად ყველგან განსაზღვრულ f ფუნქციას და შეისწავლის მის თვისებებს. ამ თვისებების საფუძველზე ავტორი ჰიპოთეზის სახით გამოთქვამს თავის სრულ რწმენას, რომ ჩორჩის თეზისის საწინააღმდეგოდ,

f ფუნქცია არაა რეკურსიული. განხილულ ნაშრომში მოცემულია სხვა ისეთი ჰიპოთეზებიც, რომლებიც აგრეთვე ეწინააღმდეგებიან ჩორჩის თეზისს, ამასთან ერთ-ერთი მათგანისათვის დამტკიცებულია, რომ იგი არ შეიძლება უკუგდებულ იქნას, იმ აზრით, რომ მისი უარყოფიდან გამომდინარეობს ჩორჩის თეზისი, ჩორჩის თეზისის დამტკიცების შეუძლებლობას კი, როგორც ეს ზემოთ აღინიშნა ლოგიკის თითქმის ყველა სპეციალისტი თვლის უდაოდ.

მათემატიკური ლოგიკისა და ალგორითმების თეორიის განვითარების თანამედროვე ეტაპზე ჩორჩის თეზისის წინააღმდეგ გამოსვლა მისი არასამართლიანობის შესახებ ჰიპოთეზის გამოთქმით წმინდა სახის სპეკულაცია იქნებოდა. საქმე იმაშია, რომ თითქმის ყველა ლოგიკოსი თვლის უდაოდ, რომ ჩორჩის თეზისი არ შეიძლება დამტკიცდეს. მაშასადამე, თუ ეს ასეა, ყოველგვარი რისკის გარეშე შეიძლება გამოთქვა ჰიპოთეზა ჩორჩის თეზისის არა სისწორის შესახებ. შ. ფხაკაძის ჰიპოთეზის შემთხვევაში სავსებით საწინააღმდეგო ვითარებაა: გამოთქვა ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ კონკრეტულად მოცემული ინტიუციურად გამოთვლადი f ფუნქცია არაა რეკურსული - ეს ძლიერ გაბედული და სარისკო საქმეა. საქმე შემდეგშია: ჩორჩის თეზისის სასარგებლო მოსაზრებებიდან ერთ-ერთს შემდეგნაირად აყალიბებენ: ყოველი აქამდე აგებული ინტუიციურად გამოთვლადი ფუნქციისათვის ადვილად პოულობდნენ მისი რეკურსიულობის დამტკიცებას. ამასთან, რწმენა იმისა, რომ მომავალშიც ასე იქნება, იმდენად ძლიერია, რომ ბევრი ავტორი არ თვლის საჭიროდ კონკრეტულად მოცემული ინტუიციურად გამოთვლადი ფუნქციისათვის ეძებოს მისი რეკურსიულობის დამტკიცება, თვლის რა, სურვილის შემთხვევაში ეს შეიძლება გაკეთდეს ყოველგვარი სიძნელეების გარეშე. აქვე შევნიშნოთ,რომ იყო ცდები f ფუნქციის რეკურსიულობის დამტკიცების გზით დაემტკიცებიათ ფხაკაძის განხილული ჰიპოთეზის მცდარობა (1986), მაგრამ ამას დღემდე შედეგი არ მოჰყოლია.

Instead of Preface

This booklet is dedicated to the memory of Professor Shalva Pkhakadze, an Honoured Scientist of Georgia. He was born in the village of Zeda Sakara of Zestafoni region in the family of Samson Pkhakadze and Nino Putkaradze.

Besides him four more children grew up in the Pkhakadze family - a sister Tamar and brothers Mikheil, Vasil and Petre. All the five, due to their professional and not only professional activities, became respected and highly rated public figures.

Tamar Pkhakadze was an Honoured Geologist of Georgia. She discovered a medicinal spring in the Terjola region and was first to notice its healing qualities. The spring now is known as Tamar's Spring.

Mikheil Pkhakadze, an Honoured Physician of Georgia, a retired colonel, a medical officer who participated in the Second World War and was decorated by several orders, still devotes all of himself to the cause of care of public health.

Vasil Pkhakadze, also an Honoured Physician of Georgia and the author of a number of scientific publications, during years worked in Abkhazia. There, due to his particularly responsive nature and high professionalism he acquired many friends who are still respecting his memory. Among his publications an impressive work on hypertonia is to be noted wherein many problems related to the topic are deeply investigated.

Petre Pkhakadze, an Honoured Meliorator of Georgia was the scientific secretary of the Melioration Institute and of the Agricultural Academy of Georgia. He was the author of a number of serious scientific works. His doctoral thesis was dedicated to the important problem of the drainage and utilization of Kolkheti lowland. When speaking of Petre Pkhakadze, one should not fail to note that he was a brilliant tamada - a leader of Georgian tableparty. He was brought up according to Georgian traditions and this feature of his personality showed itself in everything he did.

One could say much more about each of them since their merits are not limited to the above dry facts, but probably the merits of Samson and Nino Pkhakadze are more to be stressed. The cult of industry prevailed in their family, and following their own thorough and pure nature, they brought up their children with belief in faithfulness, kindness and love.

A brief biographical review of Prof. Sh.Pkhakadze's life

Shalva Phkhakadze was born on April 7, 1919 in the village of Zeda Sakara of the Zestafoni region of Georgia. He finished with honours the primary school of Zeda Sakara (1930), the Zestafoni secondary school (1933), and the Zestafoni pedagogical college (1936). In 1941 he graduated from the Department of Physics and Mathematics of Tbilisi State University. The supervisor of his diploma work was Academician G. Chogoshvili.

In 1942-1952 he worked as a teacher of mathematics at various secondary schools of Zestafoni region . Simultaneously he was a methodist of Zestafoni Regional Department of Education and the leader of mathematical section of schoolteachers of the region.

In 1949, under the guidance of Professor V. Chelidze, Sh. Phkhakadze began intensive investigations in the set theory and the theory of integral, and a year later he began research in the measure theory. On January 1952 he delivered a report at the seminar of the Department of Function Theory of A. Razmadze Mathematical Institute of the Georgian Academy of Sciences . In the report he presented the obtained results, described the direction of his research and set up a series of interesting scientific problems in the theory of the Lebesgue measure. At the same session of the seminar he accepted the advice of Prof. V. Chelidze to arrange as a candidate dissertation a part of his results concerning the validity of the Fubini theorem on the change of the integration order in iterate integrals of characteristic functions of plane sets.

As a result of the above mentioned report, in the same year he was invited to work at A. Razmadze Mathematical Institute as a Junior Researcher. Filling this position (from 29 II 1952), during a year's period he passed the candidate exams and wrote a candidate dissertation which he defended on June 30, 1953.

In October 1953 Sh. Phkhakadze delivered several reports at Steklov Mathematical Institute at the seminar of Academician P.S. Novikov. In those reports he described the direction of his research in detail, formulated main problems of this direction and presented obtained results. The positive opinion of the participants of the seminar and of the Academician P.S. Novikov strengthened his belief in his forces, so he continued fruitful investigations in the chosen direction.

In December 1955 he filled the position of Senior Researcher, and in June 1957 he was given the academic status of Senior Researcher in the speciality "Theory of functions of a real variable".

In 1956 Sh. Phkhakadze prepared the doctoral dissertation "Concerning the theory of the Lebesgue measure" which he succesfully defended in 1959. In January 1965 the academic status of Professor was conferred on him.

Since at that stage of development of mathematics and automata theory the need of specialists in mathematical logic had strongly increased, Sh. Phkhakadze considered as his duty to devote all his forces to developing mathematical logic in Georgia. He began to study mathematical logic in 1966, he delivered lectures and special courses in mathematical logic. Due to an active support of the management of the Institute of Applied Mathematics of The Tbilisi State University, in 1969 Sh.

Phkhakadze founded the Department of Mathematical Logic and Algorithms Theory which was the first research unit of this kind in Georgia. Here also, overcoming difficulties connected with the change of the area of investigations, Sh. Phkhakadze created a new direction in mathematical logic. At present in the above mentioned department a fruitful scientific research is being carried out mainly in the direction developed by Sh. Phkhakadze.

The results of the monograph of Sh. Phkhakadze "Some problems of the notation theory", as well as the results of his pupils were included as reports at the all-union symposium "Artificial intellect and automation of research in mathematics" (Kiev, 1978) and at the conference in memoriam of Gottlieb Frege (Jena, Germany, 1979). The interest which was raised by these reports contributed to further development of scientific contacts.

Prof. Sh. Phkhakadze successfully combined intensive scientific research with pedagogical work. For more than 10 years he worked at the Georgian Polytechnical Institute as a Professor of the chair of higher mathematics. From 1962 he delivered lectures and special courses for students of the Department of Mechanics and Mathematics of The Tbilisi State University. He also supervised post graduate students.

Sh. Phkhakadze was a member of various scientific councils, among them of special councils for considering candidate and doctoral dissertations. He was a member of the Georgian Scientific Council for Problems of Mechanics and Mathematics, a member of its Methodic Section and the head of the Section of Mathematical Logic. He was a member of the council of guardians of the Komarov (at present Gegelia) Physico-Mathematical boarding school, systematically helping the teachers of mathematics to overcome difficulties connected with passing to the new program.

For long and fruitful scientific, pedagogical and social activities Sh. Phkhakadze was awarded the title of Honoured

Scientist of Georgia. In 1979 by the order of the Rector of The Tbilisi State University he was awarded the Ivane Javakhishvili Medal.

A brief review of Prof. Sh. Pkhakadze's life

The first series of works of Professor Shalva Pkhakadze is dedicated to the theory of integral. The results of these works are mainly included in the paper "On iterate integrals" (Proceedings of Tbilisi Mathematical Institute, V. 20) which is a short exposition of his Candidate dissertation. Therein the problem on the validity of the Fubini theorem on the change of the integration order is studied for iterated integrals of the characteristic functions of sets whose intersections with lines parallel to coordinate axes are Borel-measurable sets. Using a rather complicated argument, the author obtains the following results: if the above mentioned sets belong to the zero Borel class, then for the corresponding characteristic functions the Fubini theorem is valid. This result is final in a sense. Namely, by means of an appropriate example it is shown that in the case where the intersections belong to the first Borel class, then the Fubini theorem, in general, is not valid.

Another series of the works is dedicated to the general set theory and the measure theory. A part of these works is included in his doctoral dissertation " the theory of Lebesgue measure" (Proceedings of Tbilisi Mathematical Institute, V. 25, PP. 3-271) which has become a classical monograph in the theory of invariant measures. It involves practically all results obtained earlier by the author in this direction. The paper is a fundamental research in the theory of Lebesgue type measures. Therein a most productive notion - the notion of an absolutely null set is introduced. This notion is a basis of all the dissertation as well as of some research work carried on later by his followers.

It must be noted that the introduction of this productive notion required a deep investigation. The idea of introducing the notion of such sets of the euclidean space R^n which may be neglected in the sense of measure, has occurred to several authors, for instance, the notion of a set of unconditional zero measure and others. However, they did not turn out to be productive and did not play any significant role in the development of the measure theory. Unlike other authors, in defining absolutely null sets, Sh. Pkhakadze impose restrictions not only on the set A under consideration, but also on any set which "naturally" has to be absolutely null along with A. Namely, he investigated 4 versions of the notion of absolutely null set and showed the unproductivity of the first three of them. According to the first version, the restrictions "is of zero measure" and "is not of positive measure" are imposed only on the set $A \subset R^n$ under consideration, according to the second version - on any subset of A, according to the third and fourth versions, on any finite and countable, respectively, configuration of A (A set A' is said to be a finite, respectively countable, configuration of A, if it can be represented as a union of a finite, respectively countable, number of sets congruent to a subset of A). It is proved that in the case of the first three versions the union of two absolutely null sets can coincide with all the space.

In the case of the fourth version (which Sh. Pkhahadze adopted as a final definition), absolutely null sets have a series of important properties. The class of these sets is closed with respect to finite union and is not closed with respect to countable union. Both facts play an important role while finding various extensions of Lebesgue type measures thus making it possible to solve Sierpinski's problems on extendability of solvable classes and extendability of Lebesgue type measures. The last problem is solved by Sh. Pkhakadze on the ground of a most probable hypothesis, namely the hypothesis that there is no unattainable cardinal number less or equal to the continuum.

Sh. Pkhakadze discovered a series of important properties of absolutely null sets formulated as necessary and sufficient conditions. Each of these conditions can be taken as a basis for defining the notion of an absolutely null set. Two of those properties can be formulated as follows.

1) For a set $A \subset R^n$ to be absolutely null, it is necessary and sufficient that any countable configuration of A be vanishing (a set $X \subset R^n$ is said to be vanishing if there is a set of zero Lebesgue measure which can be represented as $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ where each X_i is congruent to X)

2) For a set $A \subset R^n$ to be absolutely null, it is necessary and sufficient that for any Lebesgue type measure μ there exists its extension μ_1 with $\mu_1(A)=0$.

On the basis of the property 1), Sh. Pkhakadze constructed a nonmeasurable absolutely null set in R^n for n = 1,2. In this connection, he poses the problem on existence of a nonmeasurable absolutely null set in R^n for n = 3,4, ... This problem was solved by A. Kharazishvili on the basis of the same property 1).

In the paper under consideration, Sh. Pkhakadze poses also other important problems. His followers have been working successfully on these problems. For instance, M. Tetruashvili generalized his results for topological groups, and A. Kharazishvili along with the above mentioned problem solved three other ones (see the Problems II (page 82), III (page 82) and IV (page 99)).

The main item of the paper under consideration is the elaboration of powerful methods for finding the Lebesgue measure extensions with various properties. However, the results in the general set theory obtained using the methods elaborated in the paper are also of major interest. Results of Sierpinski on the existence of a set of almost invariant zero measure and of a set of the first category are essentially generalized (see (6.23)). Some important examples are constructed (see (6.7), (6.11)) and general covering theorems are proved (see (6.14), (6.15), (6.16), (6.17), (6.18), (6.19), (6.20), (6.21)). Besides, the notion of (almost) completely asymmetric set is introduced and a decomposition of the space as a union of completely asymmetric and almost Π_n-invariant sets is found (see (6.36)). On the basis of these facts, results of P. Erdos on the number of solutions of some linear equations in R^n are essentially generalized (see (6.40), (6.41), (6.42), (6.43)). Some other significant results are also obtained among which the theorem (6.33) is of a particular interest.

The second part of the second series of works consists of 8 papers. Therein Sh. Pkhakadze continues research in the same direction and obtains deep results. One should especially note those of the paper "A general method of construction" (Proceedings of Tbilisi Mathematical Institute, 1969, V.29, 103-119). Therein a general method is elaborated for effective construction of such subgroups of the Abelian group of real numbers which have null measure and a continual set of symmetric residue classes. This method enables one to construct an infinite quantity of individual instances of such subgroups. It is proved that the cardinal number of the set of such subgroups is 2^{χ}. Moreover, it is shown that each of such subgroups has a quite paradoxical property - the set obtained from it by two-times contraction can be decomposed into the continual quantity of sets congruent to it. There arises a natural question on the place of such sets among effective sets constructed by Lusin's school. Namely, it is very interesting to find out whether some of them lay out of the class of projective sets. The following opinion of the academician P.S. Novikov gives a better idea about the results of this series of works of Sh. Pkhakadze:

"In the theory of the Lebesgue measure there arose a series of problems among which the main one is the problem posed by Sierpinski on existence for any extension of the Lebesgue measure of another extension which would be an extension of the first one. In the measure theory the problem of extension is of the fundamental ones and it naturally have been arising a great interest. However, there was a little progress towards solution of the posed problems on extension of the Lebesgue measure. As a matter of fact, only separate examples of such extensions were obtained. The dissertation under consideration is a substantial forward step in the theory, and moreover, I would say that it took the theory away from the dead point. The numerous results of the author can be divided into the following groups.

1. Finding of general methods of extension of the Lebesgue measure and of extension of solvable classes of sets.
2. Generalizations of the measure in the sense that the usual requirements of invariance are replaced by the requirement of preservation of the measure under one-to-one transformations of the space forming a group.
3. Investigation of the structure of the measure by its decomposition into a sum of measures and establishing of a canonical decomposition.
4. Application of the methods developed by the author to problems lying outside of the measure theory.

The first circle of the named results forms a rather general theory of extension of the Lebesgue measure. In these investigations the author introduces a series of important notions such as of absolutely null set, of a proper almost invariant set etc. The germs of some of these notions can be found in works of previous authors. In the dissertation, however, they are developed at the full extent, they are systematically studied, and there is no doubt that in the future they will be repeatedly used.

The theory of measure extension created in the dissertation would remain incomplete if therein there would be no progress in the direction of solving of the above mentioned problems. The central one is the problem of Sierpinski on existence of a nonextendable measure. In the dissertation the following answer is given to this problem: every $\mathfrak{I}^n$-measure is extendable if there is no unattainable cardinal number which would be less than continuum."

Analyzing this answer, P.S.Novikov further writes: "... I think that the problem of Sierpinski is solved fully enough.

The author shows that if one adds to the axioms of the $\mathfrak{I}^n$ - measure any of two quite natural axioms (A) and (B), then for such measures the problem of Sierpinski is solved completely without additional hypotheses. Likewise, without any additional hypothesis can be proved the extendability of any solvable class."

Finally P.S. Novikov writes: "... The work under consideration is a substantial advance in one of the important areas of the set theory. Therein powerfull methods are created which made possible to overcome serious difficulties. In my opinion, this work is a very good doctoral dissertation."

The official opponent professor A.A. Lyapunov writes in his review: "The work is a bright event in the set theory."

Professor V.A. Rokhlin in his review (RZh Mat., 1960, 11456) on the paper writes: " The work is a fundamental research dedicated to the investigation of invariant extensions of the Lebesgue measure. It is known that such continuations exist, but up to now this knowledge was very scarce and consisted mainly of separate examples. The author has managed to prove a series of structural theorems on them."

The basic results of the next series of works of Sh. Phkhakadze are mainly set forth in the monograph "Some problems in the notation theory" (Tbilisi University Press, 1977). Therein rules for definition of contracted symbols are introduced and studied. The monograph is in mathematical logic; however, it is similar to the above considered one by the fact that from the very beginning a particular attention is payed to the development of the fundamental concepts. In this particular case this peculiarity of investigations of Sh. Phkhakadze is clearly expressed.

The conceptual aspect of the work is to be particularly stressed.

The development of the formal mathematics has led us to significant discoveries and results. They belong not only to the foundations of mathematics but also to its special fields. At the contemporary stage of the development of mathematics it is doubtful to obtain such results without using methods of formal mathematics. Therefore for development of the whole mathematics it is most important to master the methods of the formal mathematics. In spite of this, the majority of fields of mathematics is developing on the intensional level. This is due to the fact that it is difficult to master the methods of the formal mathematics since valuable expositions of formal mathematical systems are not available. To improve the existing expositions, deep scientific research is needed.

One of the essential peculiarities of formal mathematical systems is the limitation of the alphabet of the theory and its reduction to minimum. This makes the class of the propositions of the theory available for the examination as a whole, the concept of the proof can be defined exactly, a series of mathematical problems can be formulated clearly and their solving is facilitated. Modern mathematical theories which are developing intensionally are influenced by methods of formal mathematical theories, they reduce their alphabet to minimum and associate formal mathematical concepts to the intuitive ones. For instance, the concept of algorithm and related concepts are introduced in such a way.

Although the limitation of the alphabet of the theory is very advantageous theoretically, it causes substantial difficulties. Namely, one has to introduce extremely long forms (formulas and terms), and it is practically impossible to write them down and perceive their meaning. To get over these difficulties, contracted symbols are introduced.

In the case of a rather rich theory (as the set theory), the rules of definition of contracted symbols are just slightly restricted or are not restricted at all so that it is impossible to establish general properties of abridging symbols and abridged forms. Because of this the principle is adopted according to which a abridged form is considered as the form it denotes. But the complete realization of this principle is impossible due to the above mentioned difficulties.

This implies the necessity of changing of the above principle and adopting of one which would make possible to draw conclusions about forms operating directly on their abbreviations. This, in its turn, gives rise to the need for general rules of operations on abridged forms. To this aim, it is necessary to establish general properties of abridging symbols and abridged formulas by restricting their intuitional concepts by exact mathematical notions, i.e. by defining the notion of the abridging symbol on the basis of restriction of the rules of their introduction. Moreover, a rational solution of the problem is needed.

In the considered work a rather rational system of definition rules is found for contracted(abridging) symbols in the cases of classical formal and intensional mathematical theories. By the rationality of a system of rules is meant the fact that, on the one hand, it is so general that by its aid almost all symbols used in classical formal theories can be derived, and on the other hand, the symbols introduced according to these rules possess properties rich enough to ensure a considerable liberty in operating on abridged forms. Namely, by means of contracted symbols mathematical arguments can be transferred into the enlarged theory using natural general laws.

The construction of a mathematical theory (formal or unformal) with a limited alphabet and rational (in the above sense) rules of introducing of contracted symbols is of a great theoretical and practical importance. It makes possible to study the main theory using effectively its various extensions obtained by adding contracted symbols; it reveals deep connections between various mathematical theories. It is practically necessary for the automation of mathematical research and the creation of special systems processing mathematical texts.

Moreover, in the work algorithmic processes of reconstruction of the form by its abbreviation are studied. In a rather naturally introduced class of algorithms, an algorithm is found for such a reconstruction with minimal number of steps. Various numerical characteristics of contracted symbols and contracted forms are also studied and algorithms are found for their evaluation. It should be especially noted that a carefully thought out system of terms and concepts is used. Namely, there are introduced various types of abridging symbols and abridged forms, various reconstructing processes, various types of applications of definition of abridging symbols, various types of particular cases of abridging symbols, etc.

It is clear from the above said that the monograph of Prof. Sh. Phkhakadze is a significant gain in mathematical logic and a deep research in this field. It deals with the foundations of mathematics and has a great theoretical and practical value. It can be successfully used while writing monographs in those fields of formal and unformal mathematics which use a limited alphabet, namely, abridging symbols of the types I-IV, II′ and IV′ are to be used. For them important properties are established facilitating to carry out mathematical reasoning and making possible to change intuitive arguments by exact ones.

The further study of the problems dealt within the monograph in the direction indicated by the author is of great importance.

It should be especially noted that a well formulated independent theory -- the notation theory is being created on the basis of the obtained results. This theory has existed as a part of the more general theory -- the theory of definitions.

Finally note that the results of the monograph arise the interest not only of theoreticians, but also of specialists of the applied mathematics working in the theory of automata. Presently an intensive work is being carried out aiming the automation of mathematical research, the creation of automatic systems for processing mathematical texts. There exist rather convincing reasons according to which mathematical texts of only those mathematical theories can be processed by the aid of automatic systems which use a restricted alphabet and are created on the basis of the well developed notation theory.

Sh. Phkhakadze further continues research for developing his theory of contracted symbols. Here the work "Some problems of the theory of contracted symbols" (Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics of Tbilisi State University, v.11, 1982) is to be mentioned. Therein problems are formulated and perspective directions are indicated in the theory of abridging symbols.

To illustrate better the results of this work, we quote well known Russian scientists.

V.M. Matrosov. "*From our point of view, the representation of knowledge and the economy of "thinking" of a computer (in* *particular, a hierarchical organization of concepts and theories in the data structure of a computer and processing of mathematical texts) needs the application of results of the notation theory. In the monograph of Sh. Phkhakadze the first attempt is given of systematic development of the named theory. Theories in languages of rather general type without concretizing axioms and derivation rules are considered and restrictions are imposed on the rules of introducing of contracted symbols. This makes it possible to operate on contracted forms instead of expressions they denote. General properties of abridged forms are studied and operations on them are defined. The rules of introducing of abridging symbols are chosen so that rather good properties of abridged forms be obtained guaranteeing the homomorphism of the algebra of operations on abridged forms into the algebra of operations on initial expressions of object theories. A system of rules is found for classical formal and unformal mathematical theories which are rational from the point of view of generality and the above mentioned homomorphism.*"

Y. I. Yanov. "*Although abridging notation has been constantly used in constructing mathemaical theories, a systematic study of problems arising in this connection was first made in the named work of Sh. Phkhakadze. Therein a theoretical basis was laid down for introducing and using abridging notation in mathematical theories. The actuality of this problem is due to the fact that development and exposition of any, even rather simple, mathematical theory is practically impossible without introducing additional symbols, axioms and definitions playing a role of abridging notation. In this connection a series of important problems arises such as the problem on conservativeness of the extension, i.e. whether the set of theorems which can be formulated in the language of the original theory remains unchanged, the problem of relation between properties of* *abridged and unabridged notation, etc. The work of Sh. Phkhakadze, by means of a certain classification of abridging notation, makes it possible to obtain rather simply answers to similar problems. The basic ideas of the work were further developed in the works of the pupils of Sh. Phkhakadze. As a concrete application, the works in this direction may be used in problems of constructing an artificial intellect."*

O.B. Lupanov. "*Professor Sh. Phkhakadze is a leading specialist in mathematical logic and set theory. During last fifteen years, he has been developing an important direction in mathematical logic connected with the notation theory. This direction formalizes the procedure of using abridging notation and is essential in constructing artificial mathematical languages, in problems of automated deriving of theorems, etc.*"

S.V. Yablonskii . "*Prof. Sh. S. Phkhakadze is a leading specialist in mathematical logic. He is developing an original direction related to the theory of formal systems. In constructing theories we usually start from a limited alphabet and therefore we have to use abridged notation not contained within the framework of the theory.* Prof. Pkhakadze gives a common approach to operations with contracted symbols, this is of great importance for constructing mathematical theory within mathematical logic."

S.M. Nikolskii. "*The monograph not only opens an actual direction, but also contains large possibilities in the area of automated processing of mathematical texts.*"

An especial interest was arisen by the talk of Sh. Phkhakadze at the VI All-Union Conference of Logicians where he criticized the Church thesis. The results in this direction are mainly contained in the work " An example of an intuitively calculable everywhere defined function and Church thesis" (Tbilisi University Press, 1984). In connection of this work it should be noted the following:

In the work the very important and fundamental problem on the validity of the Church thesis is considered. This thesis can be formulated as follows: any intuitionally calculable function is recursive (or: the class of intuitively calculable functions coincides with the class of recursive functions). The functions of the type $N^n \rightarrow N$ are meant here where N is the set of natural numbers. Some reasons in favor of the Church thesis are known on the basis of which almost all logicians think that the thesis is true. On the basis of the Church thesis many very strong results are proved on unsolvability of algorithmic problems important both for theory and practice (for instance, by means of the thesis a very important theoretical result is proved on essential noncompleteness of the formal arithmetics). Therefore the negation of the Church thesis would have a great theoretical and practical value since the existing belief in its validity practically forbids any further research of such problems.

In the named work the author, using an original method called by himself the "complex diagonal method", constructs an intuitively calculable everywhere defined function f and studies its properties. On the basis of these properties, the author, as a hypothesis, expresses his full belief that, contrary to the Church thesis, the function f is not recursive.

At the contemporary stage of development of mathematical logic and algorithm theory, a claim against the Church thesis can be considered as a purely speculative act. The point is that almost every logician considers as a doubtless fact that it is impossible to prove the Church thesis. Therefore there is no risk in proposing the hypothesis on invalidity of the Church thesis. In the case of the author's hypothesis, the situation is completely different. It is very audacious and risky to propose the hypothesis that a concrete intuitively calculable function f is not recursive. The point is that one of the reasons in favor of the Church thesis reads as follows:

for any intuitively calculable function constructed up to now the proof of its recursiveness was easily found, and the belief that it will be so in the future is so strong that many authors don't consider as necessary to seek for the proof of recursiveness of a concrete intuitively calculable function thinking that if needed this will be done without any difficulty. Note also that there were attempts to prove the recursiveness of the function and thereby the invalidity of Sh. Phkhakadze's hypothesis (1986)

But these attempts did not succeed. The properties of the function f give all the grounds to believe that the prove will not appear in the future as well, so it can be expected that in the future the significance of the work will considerably increase.

In the work other hypothesis contradicting the Church thesis are also formulated. For one of them it is proved that it cannot be rejected in the sense that its negation implies the Church thesis which, in the opinion of almost all logicians, can not be proved.

გამოქვეყნებულ ნაშრომთა სია

List of Publications

...

1. О повторных интегралах. Сообщ. АН ГССР 14, 1952.
2. О повторных интегралах. Труды Мат. 20, 1954.
3. Об абсолютно нульмерных множествах. Сообш. АН ГССР 15, 1954.
4. О различных определениях понятия абсолютно нульмерных множеств. Сообш. АН ГССР 15, 1954.
5. Неизмеримые абсолютно нульмерные множества, их сщетные суммы и собственно почти инвариантные множества. Сообш. АН ГССР 16, 1955.
6. Расширимость разрешаемых классов. Сообш. АН ГССР 16, 1955.
7. О продолжимости меры Сообш. АН гсср,17, 1956
8. Некоторые предложения эквивалентные гипотезе континиума. ДАН СССР III 1956.
9. К теории Лебеговской меры. Труды Мат. ин-та АН ГССР 25, 1958.
10. Один обший метод построения эффективного примера континуальной подгруппы абелевой группы действительных чисел. Труды Мат. ин-та АН ГССР 29, 1963.
11. Разложение меры. Сообш. АН ГССР, 31, 1963.
12. Разложение мер различных типов. Сообш. АН ГССР, 31, 1963.
13. Разложения меры. Труды Мат. ин-та АН ГССР, 29, 1963.
14. О сойствах непрерывности и разрывности мер. Вестник ГПИ, 1-97, 1964.
15. Связь между вопросами о существовании некоторых плоских множеств и канонического разложения мер. Труды ГПИ, 1-99, 1965.
16. მანქანურ-კოდური გამოცდები მათემატიკაში. თსუ, 1966.

17. მანქანურ-კოდური გამოცდები მათემატიკაში. თსუ,1967.
18. Каноническое разложение и свойства непрерывности и разрывности мер. Труды Математ. ин-та АН ГССР, 34, 1968.
19. Трудности, связанные с вопросом о существовании канонического разложения заданной меры. Труды Мат. ин-та АН ГССР, 34, 1968.
20. ამოცანათა კრებული მათემატიკაში. თსუ, 1970.
21. წინადადებათა ალგებრის გამოყენება ავტომატთა თეორიაში. თსუ, 1971.
22. განტოლებათა თეორიის ზოგიერთი საკითხები. თსუ, 1972.
23. Об одном классе сокращающих символов. Изд. Тбилисского ун-та,1975.
24. Сокращенные формы и производные операторы обшего вида. Депонированный, гос. рег.74060148, 1975.
25. სიმრავლეთა თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები. თსუ, 1978.
26. Некоторые вопросы теории обозначений. Изд. Тбилисского ун-та, 1978.
27. Некоторые вопросы теории обозначений. Изд-во ин-та кибернетики АН УССР, 1978.
28. К теории обозначений. Изд. Иенского ун-та, 1979.
29. Некоторые вопросы. Изд. Иенского ун-та, 1979.
30. Некоторые задачи теории обозначении. Изд. Тбилисского ун-та, Труды ИПМ им. И.Н.Векуа.2.1982.
31. Один пример интуитивно вычислимой всюду определенной функции и тезис Черча. Изд. Тбилисского ун-та. Шестая Всесоюзная конф. по мат. логике 1982.
32. Один пример интуитивно вычислимой всюду определенной функции и тезис Черча. Изд. Тбилисского ун-та. Доклады семинара им. И.Н.Векуа,17, 1983.

33. Один пример интуитивно вычислимой всюду определенной функции и тезис Черча. Изд. Тбилисского ун-та. 1984.
34. О математических теориях. ИПМ. доклады Т.22. 1993.
35. Кванторы в математическом анализе. ИПМ. доклады Т.22. 1993.
36. τ_{sr} logic-Foundation of Assertional Programming- TUP, REPORTS, N3, 1995 (Rukhaia Kh.)
37. მათემატიკური ლოგიკა საფუძვლები (1 ნაწილი) თსუ.1996
38. A.N. Bourbaki Type General Theory And The Properties Of Contraqting Symbols And Corresponding Contracted Forms. Georgian Mathematical Journal, Vo26 No2 1999
39. მათემატიკური ლოგიკა-საფუძვლები. (ნაწილი 2). გადაცემულია გამოსაქვეყნებლად.

***

მთავარი რედაქტორი მ. თეთრუაშვილი
ავტორები ხ. რუხაია, ო. ჭანკვეტაძე
მთარგმნელი გ. კვინიკაძე

ტექსტი გამოსაცემად მომზადდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტთან არსებული ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის კომპიუტერული ცენტრში

შეკვეთა №139 ტირაჟი 120

გამომცემლობა „ინტელექტი"

ჭავჭავაძის გამზირი №2, ტელ.: 22 43 62